Studeo® Formelsammlung Mathematik – Grundlegende Formeln für Rechenoperationen

STUDEO RICHTIG STUDIEREN

MENGENLEHRE:

$A\subset B \Leftrightarrow \underset{x}{\forall}\, x\in A \Rightarrow x\in B$; $A=B\Leftrightarrow \underset{x}{\forall}\, x\in A\Leftrightarrow x\in B$

$P(A)=\{B|B\subset A\}$; $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

Disjunktheit bei: $A\cap B=\emptyset$

$B\setminus A=\{x|x\in B\wedge x\notin A\}$; $\bar A_B=\{x|x\in B\wedge x\notin A\}$

Kommutativgesetz: $A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$

Assoziativgesetz: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

Distributivgesetz: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

De Morgan´sche Gesetz: *es gilt* $A\subset G$ *und* $B\subset G$

$\overline{(A\cup B)}_G=\bar A_G\cap\bar B_G$, $\overline{(A\cap B)}_G=\bar A_G\cup\bar B_G$

$\bar G_G=\emptyset$, $\bar\emptyset_G=G$; $A\cap\bar A_G=\emptyset$, $A\cup\bar A_G=G$

$A\subset B\Leftrightarrow\bar B_G\subset\bar A_G$

GRUNDLEGENDES:

Binomische Formeln: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Binomischer Satz: $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Mittelwerte *von 2 Größen (von n Größen): (mit* $x_i\ge0$ *)*

arithmetisches: $\bar x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $\bar x=\frac1n\sum_{v=1}^{n}x_v$

geometrisches: $\bar x_g=\sqrt{x_1\cdot x_2}$; $\sqrt[n]{\prod_{v=1}^{n}x_v}$

harmonisches: $\bar x_h=\frac{2x_1\cdot x_2}{x_1+x_2}$; $\bar x_h=\frac{n}{\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{x_v}}$

Potenzgesetze: *es sei a,b ∈ R und n,m ∈ Z*

$(a^n)^m=a^{nm}$; $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ *(mit a≠0)*; $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac ab\right)^n$ *(mit b≠0)*

außerdem gilt: $a^0=1$; $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

Wurzelgesetze: *es sei* $a,b\ge0$

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac ab}$ *(mit b > 0)*

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$

Logarithmengesetze: (w∈R; a,b,u,v,x ∈ R^+ und a≠1) $x=\log_a b$ heißt der Logarithmus der Zahl b zur Basis a und berechnet sich nach: $\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\ln b}{\ln a}$.

folgende Regeln gelten: $\log_{10}b=\lg b$

$\log_e b=\ln b$; $\log_a(a^x)=x$; $a^{\log_a x}=x$

$\log_a 1=0$; $\log_a a=1$; $\log_a(u^w)=w\cdot\log_a u$

$\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$; $\log\left(\frac uv\right)=\log_a u-\log_a v$

Summenzeichenregeln:

$\sum_{i=m}^{n}a_i\pm\sum_{i=m}^{n}b_i=\sum_{i=m}^{n}(a_i\pm b_i)$; $\sum_{i=1}^{n}c\cdot a_i=n\cdot c$ (c=const.)

$\sum_{i=m}^{n}c\cdot a_i=c\cdot\sum_{i=m}^{n}a_i$; $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=k}^{h}a_{ij}=\sum_{j=k}^{h}\sum_{i=m}^{n}a_{ij}$

$\sum_{i=m}^{k}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i=\sum_{i=m}^{n}a_i$ $[m\le k<n]$

Produktzeichenregeln:

$\prod_{i=m}^{n}a_i\cdot\prod_{i=m}^{n}b_i=\prod_{i=m}^{n}a_ib_i$; $\frac{\prod_{i=m}^{n}a_i}{\prod_{i=m}^{n}b_i}=\prod_{i=m}^{n}\frac{a_i}{b_i}$ *(mit* $b_i\neq0$*)*

$\prod_{i=m}^{k}a_i\cdot\prod_{i=k+1}^{n}a_i=\prod_{i=m}^{n}a_i$ $[m\le k<n]$

$\prod_{i=m}^{n}c\cdot a_i=c^{n-m+1}\cdot\prod_{i=m}^{n}a_i$ *speziell gilt*: $\prod_{i=1}^{n}c=c^n$

FUNKTIONEN:

Lineare Funktionen: $y=mx+b$;

Nullstelle: $x_{NS}=-\frac bm$

Quadratische Funktionen: $y=ax^2+bx+c$

Normalform: $y=x^2+px+q$

P-Q-Formel: $x=-\frac p2\pm\sqrt{\left(\frac p2\right)^2-q}$

Linearfaktorzerlegung: $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$

Ganz-rationale Funktionen:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

Gebrochen-rationale Fkt.: $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i}{\sum_{i=0}^{m}b_ix^i}$

FOLGEN und REIHEN:

arithmetische Folge: $a_{n+1}-a_n=d$ *(für alle n∈N_0)*

geometrische Folge: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ *(für alle n∈N_0)*

Eine Folge heißt **konvergent**, *wenn gilt:* $|a_n-a|<\varepsilon$

(für alle n ≥ n_0), und konvergiert gegen a: $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

folgende Regeln gelten:

$\lim_{n\to\infty}\{a_n\pm b_n\}=a\pm b$; $\lim_{n\to\infty}\{c\cdot a_n\}=c\cdot a$

$\lim_{n\to\infty}\{a_n\cdot b_n\}=a\cdot b$; $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\frac ab$ *(* b_n *,b ≠0)*

Reihe: $s=a_0+a_1+\ldots+a_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$

arithmetische: $s=\sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=0}^{n}(a_0+id)$

geometrische: $s=\sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=0}^{n}a_0q^i$

DIFFERENTIALRECHNUNG:

Allgemeine Ableitungsregeln:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$

$\Rightarrow[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

$\Rightarrow[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

$\frac fg(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$

$(f\circ h)(x)=f(h(x))$

$\Rightarrow[f(h(x))]'=f'(h(x))\cdot h'(x)$

Partielle Differentiation:

1.part.Abl.nach x_1: $f_1(x_1,x_2)=\frac{\delta f(x_1,x_2)}{\delta x_1}$

1.part.Abl.nach x_2: $f_2(x_1,x_2)=\frac{\delta f(x_1,x_2)}{\delta x_2}$

Für Ableitungen n-ter Ordnung, leitet man (hintereinander) n-mal ab. Für Part. Abl. zweiter Ordnung (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})

[für i,j=1,2,...,n] gilt: $\frac{\delta f_i(x)}{\delta x_j}=\frac{\delta^2f(x)}{\delta x_i\delta x_j}=f_{ij}(x)$

wobei $f_{ij}(x)=f_{ji}(x)$.

Ableitungen elementarer Funktionen:

$f(x)=c\Rightarrow f'(x)=0$; $f(x)=x^b\Rightarrow f'(x)=b\cdot x^{b-1}$

$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$; $f(x)=a^x\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a$

$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac1x$; $f(x)=\log_a x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$

$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$; $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$; $f(x)=\cot x\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sin^2x}$

INTEGRALRECHNUNG: Rechenregeln:

$\int_a^a f(x)dx=0$ *(für a = b und f(a) definiert)*

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ (für a > b und f auf [a,b] integrierbar)

$\int_a^b(c\cdot f(x))dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$ (Homogenität des Integrals)

$\int_a^b(f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ (Additivität des Integrals)

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$ (Monotonieeigenschaft); it $f(x)\le g(x)$)

Ist f stetig auf [a,b], so gilt für jede

Stammfunktion F von f: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$

Tabelle der Grundintegrale: (c∈R)

$\int dx=x+c$; $\int a\,dx=ax+c$; $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$

$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ *(mit α≠1)*; $\int\sqrt{x}\,dx=\frac23x\sqrt{x}+c$

$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$; $\int e^xdx=e^x+c$; $\int\frac{dx}{\sqrt x}=2\sqrt x+c$

$\int\ln x\,dx=x\cdot\ln x-x+c$; $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$; $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+c$; $\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+c$

$\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\tan x+c$; $\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\cot x+c$

KOMPLEXE ZAHLEN: *(mit k∈R)*

Es seien $z_1=(a,b)=a+i\cdot b$, $z_2=(c,d)=c+i\cdot d$

(mit $i=\sqrt{-1}$ *oder* $i^2=-1$ *); mit folgenden Regeln:*

$z_1=z_2\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$; $z_1\pm z_2=(a\pm c)+i\cdot(b\pm d)$

$k\cdot z_1=k\cdot a+i\cdot k\cdot b$; $z_1\cdot z_2=(a\cdot c-b\cdot d)+i\cdot(a\cdot d+b\cdot c)$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}$ *(für* $c^2+d^2>0$ *)*

Exponentialdarstellung: $z=|z|\cdot e^{i\varphi}$; ($|z|=\sqrt{a^2+b^2}$)

Polarkoordinatenform: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

mit $\cos\varphi=\frac{a}{|z|}$ *und* $\sin\varphi=\frac{b}{|z|}$

Winkelfunktionen:

in jedem rechtwinkligen Dreieck gilt ($\gamma=90°$) *:*

$\sin\alpha=\frac ac=\frac{Gk}{Hy}$; $\cos\alpha=\frac bc=\frac{Ak}{Hy}$

$\tan\alpha=\frac ab=\frac{Gk}{Ak}$; $\cot\alpha=\frac ba=\frac{Ak}{Gk}$

In jedem! Dreieck gilt: Sinussatz:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

Kosinussatz: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$